

二次根式的化简

一、二次根式有理化

二次根式有理化

最简二次根式：

- 1、_____.
- 2、_____.
- 3、_____.

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\frac{m}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【教法备注】

1、最简二次根式：

- ① 被开方数不含分母 .
- ② 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式 .
- ③ 分母中不含二次根式 .

2、二次根式分母有理化：二次根式的运算中，最后结果要求分母中不含二次根式，把分母中的根号化去的过程称为分母有理化 .

具体过程：

$$\textcircled{1} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a} \quad (\text{其中 } b \geq 0, a > 0).$$

实质是利用 $(\sqrt{a})^2 = a$ ，将二次根式分母有理化 .

$$\textcircled{2} \frac{m}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{m\sqrt{a} + m\sqrt{b}}{a - b}.$$

实质是利用平方差公式 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ ，将二次根式分母有理化 .

$$\textcircled{3} \text{ 也可以通过类似分式的“约分”进行分母有理化，如 } \frac{ab}{\sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{b})^2}{\sqrt{b}} = a\sqrt{b} (b > 0).$$

例：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+1} &= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1; \\ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \sqrt{3}-\sqrt{2}; \\ \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})} = \sqrt{4}-\sqrt{3}; \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}; \\ \text{则 } \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} &= \sqrt{n+1}-1. \\ \frac{2}{\sqrt{3}+1} &= \frac{2 \times (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}-1; \\ \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \frac{2 \times (\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \sqrt{5}-\sqrt{3}; \\ \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} &= \frac{2 \times (\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \sqrt{7}-\sqrt{5}. \\ \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} &= \frac{2 \times (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})} \\ &= \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}. \\ \text{则 } \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}.\end{aligned}$$

|| 例题

【知识点拨】

二次根式有理化这部分是一个易错点，学生会将 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$ 的化简方法进行混淆，这部分讲解时因为 $\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$ 分母中出现了减法，所以要用平方差进行有理化。求解时要先将二次根式进行有理化后，再进行计算。

1. 计算： $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{18}}{3} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】 二次根式的除法

【重点强调】

2017~2018学年天津河东区初二下学期期末第14题3分

2. 化简下列各式：

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) \frac{1}{2+\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 (1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{5}-2$

(4) $5+2\sqrt{6}$

【标注】【知识点】分母、分子有理化

3. 计算： $\frac{5}{4-\sqrt{11}} - \frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} - \frac{2}{3+\sqrt{7}}$.

【答案】 1 .

【解析】

原式

$$\begin{aligned}&= \frac{5(4 + \sqrt{11})}{(4 - \sqrt{11})(4 + \sqrt{11})} - \frac{4(\sqrt{11} + \sqrt{7})}{(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7})} - \frac{2(3 - \sqrt{7})}{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})} \\&= 4 + \sqrt{11} - \sqrt{11} - \sqrt{7} - 3 + \sqrt{7} = 1.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

4. 若 $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, 求 $3x^2 + 5xy + 3y^2$ 的值.

【答案】299.

【解析】 $x = 5 - 2\sqrt{6}$, $y = 5 + 2\sqrt{6}$,

$$\begin{aligned}&3x^2 + 5xy + 3y^2 \\&= 3(x^2 + 2xy + y^2) - xy \\&= 3(x + y)^2 - xy \\&= 300 - 1 \\&= 299.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次根式化简求值

【重点强调】

2017~2018学年1月天津和平区天津市双菱中学月考第26题

|| 练习

5. 计算 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 的结果等于 ____.

【答案】 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

【解析】

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次根式的乘除混合运算

【重点强调】

2018年天津和平区初三一模第14题3分

6. 化简：

$$(1) \frac{3}{\sqrt{10} + \sqrt{7}} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6} + 2} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(3) \frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{7} + 2} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】(1) $\sqrt{10} - \sqrt{7}$

(2) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

(3) $\frac{11 - 4\sqrt{7}}{3}$

【标注】【知识点】分母、分子有理化

7. 计算： $\frac{7}{7 - \sqrt{21}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} .$

【答案】 1.

【解析】

$$\begin{aligned}& \frac{7}{7-\sqrt{21}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \\&= \frac{7(7+\sqrt{21})}{(7-\sqrt{21})(7+\sqrt{21})} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} \\&= \frac{7+\sqrt{21}}{4} - \frac{\sqrt{21}+3}{4} \\&= 1.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】分母、分子有理化

8. 化简： $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2018}}$.

【答案】 $\sqrt{2019} - 1$.

【解析】 原式 $= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{2019} - \sqrt{2018} = \sqrt{2019} - 1$.

【标注】【知识点】二次根式的巧算

9. 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$, 求 $a^2 + b^2 + 2ab$ 的值.

【答案】 3.

【标注】【知识点】二次根式的化简求值——利用完全平方

二、复合二次根式化简

复合二次根式化简

完全平方公式化简

完全平方公式: _____

$$\sqrt{a^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(\sqrt{x} \pm \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

双重二次根式化简: $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$

【知识点拨】

1、完全平方公式化简：

$$\textcircled{1} \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \\ = \left|x - \frac{1}{x}\right| + \left|x + \frac{1}{x}\right|.$$

$$\textcircled{2} \text{已知 } x + \frac{1}{x} = 3, \text{ 则 } \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + 2 + \frac{1}{x} = 5,$$

$$\text{则 } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}.$$

$$\text{反之, 已知 } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}, \text{ 可求 } x + \frac{1}{x} = 3.$$

$$\textcircled{3} \text{已知 } x = 4 + \sqrt{7}, y = 4 - \sqrt{7},$$

$$\text{则 } (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} = 14,$$

$$\text{则 } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{14}.$$

$$\textcircled{4} \text{已知 } a + b + 4 = 2\sqrt{a-2} + 4\sqrt{b+1}, \text{ 求 } a, b \text{ 的值.}$$

$$(\sqrt{a-2})^2 - 2\sqrt{a-2} + 1 + (\sqrt{b+1})^2 - 4\sqrt{b+1} + 4 = 0,$$

$$(\sqrt{a-2} - 1)^2 + (\sqrt{b+1} - 2)^2 = 0,$$

$$\sqrt{a-2} = 1, \sqrt{b+1} = 2,$$

$$a = 3, b = 3.$$

2、双重二次根式化简：

双重二次根式化简的实质还是将其化为 $\sqrt{(a+b)^2}$, 再依据二次根式性质进行化简.

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2} + 1.$$

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 2 - \sqrt{2}.$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{2}(4-2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

|| 例题

【知识点拨】

完全平方公式化简这部分，主要是根据完全平方公式进行变形。双重二次根式化简这部分，也要利用配方的思想，配凑出完全平方公式，然后进行开方；这部分还需要进行扩倍、缩倍进行配方。

10. 若 $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{6}$, $0 < x < 1$, 则 $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}$ 的值为 _____.

【答案】 $-\sqrt{2}$

【解析】 $\because \sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{6}$
 $\therefore \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 = 6$
 $\therefore \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + 4 = 6$
 $\therefore \left|\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right| = \sqrt{2}$
 $\because 0 < x < 1$
 $\therefore \sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}} = -\sqrt{2}.$

【标注】 【知识点】 二次根式的四则混合运算

【知识点】 完全平方公式的计算-不含分式

【能力】 运算能力

11. 已知 $x + \frac{1}{x} = 3$, 那么 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ 的值为 _____.

【答案】 1

【解析】 $\because x + \frac{1}{x} = 3, \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - 2 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} - 2 = 3 - 2 = 1,$
 $\therefore \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \pm 1, \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 1.$

【标注】 【知识点】 二次根式化简求值

12.

计算： $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

【答案】 $2-\sqrt{2}$

【解析】 略.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】多重二次根式

13. 计算： $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

【答案】 $\sqrt{3}+1$.

【解析】 略

【标注】【能力】运算能力

【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

【知识点】多重二次根式

14. $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$ 的结果为().

A. $3-\sqrt{7}$

B. $\sqrt{7}-\sqrt{3}$

C. $\sqrt{7}-\sqrt{2}$

D. $3-\sqrt{5}$

【答案】 C

【解析】

$$\text{令 } \sqrt{9 - 2\sqrt{14}} = \sqrt{m} - \sqrt{n} (m > n)$$

$$\therefore 9 - 2\sqrt{14} = m + n - 2\sqrt{mn}$$

$$\therefore \begin{cases} m + n = 9 \\ mn = 14 \end{cases}, \therefore \begin{cases} m = 7 \\ n = 2 \end{cases}.$$

【标注】【知识点】多重二次根式

15. 化简下列二次根式：

$$(1) \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}.$$

$$(2) \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}.$$

$$(3) \sqrt{7 - \sqrt{48}}.$$

$$(4) \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

【答案】 (1) $1 + \sqrt{3}$.

$$(2) 2 - \sqrt{2}.$$

$$(3) 2 - \sqrt{3}.$$

$$(4) \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】最简二次根式

【知识点】多重二次根式

16. a, b 为有理数, 且满足等式 $a + b\sqrt{3} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$, 求 $a + b$ 的值.

【答案】 $a + b = 4$

【解析】

$$\begin{aligned}& \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} \\&= \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}} \\&= \sqrt{6} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\&= \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\&= \sqrt{3} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \\&= \sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) \\&= 3 + \sqrt{3} . \\&\therefore a + b\sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} , \\&\therefore a = 3 , b = 1 , \\&\therefore a + b = 3 + 1 = 4 .\end{aligned}$$

【标注】【知识点】多重二次根式

练习

17. 已知 $a + \frac{1}{a} = 7$, 则 $a^2 + \frac{1}{a^2} + \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ 的值是 _____ .

【答案】 50

【解析】

$$\begin{aligned}& a + \frac{1}{a} = 7 , \\& \therefore \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 = a + \frac{1}{a} + 2 = 7 + 2 = 9 \text{ 且 } \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} > 0 , \\& \therefore \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 3 , \\& \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 = 49 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 , \\& \therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = 47 , \\& \therefore a^2 + \frac{1}{a^2} + \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 47 + 3 = 50 , \\& \therefore \text{原式} = 50 .\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次根式的化简求值——利用完全平方

18. 计算：

(1)

已知： $a + \frac{1}{a} = 1 + \sqrt{10}$ ，求 $a^2 + \frac{1}{a^2}$ 的值。

(2) $1 < x < 2$ ， $x + \frac{1}{x-1} = 7$ ，求 $\sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的值。

【答案】 (1) $2\sqrt{10} + 9$ 。

(2) -2 。

【解析】 (1) $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = (1 + \sqrt{10})^2 - 2 = 2\sqrt{10} + 9$ 。

(2) $\because 1 < x < 2$,

$$\therefore 0 \leq \sqrt{x-1} \leq 1,$$

$$\therefore \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} < 0,$$

$$\therefore \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$= -\sqrt{\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^2}$$

$$= -\sqrt{x-1 + \frac{1}{x-1} - 2}$$

$$= -\sqrt{7-1-2}$$

$$= -2.$$

【标注】【知识点】二次根式化简求值

19. 化简： $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $1 + \sqrt{5}$

【标注】【知识点】多重二次根式

【能力】运算能力

20. 计算： $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ 。

【答案】 $\sqrt{2} - 1$.

【标注】【知识点】最简二次根式

21. $\sqrt{16 - 2\sqrt{63}}$ 的结果为 _____ .

【答案】 $3 - \sqrt{7}$

【解析】原式 $= \sqrt{(\sqrt{7})^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times \sqrt{7}}$
 $= \sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2}$
 $= 3 - \sqrt{7}$.

【标注】【知识点】多重二次根式

【能力】运算能力

22. 计算下列各式：

(1) $\sqrt{8 + \sqrt{15}}$.

(2) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

(3) $\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$.

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{30} + \sqrt{2}}{2}$.

(2) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

$$(3) \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}.$$

【解析】(1)

$$\text{原式} = \frac{\sqrt{16 + 2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}}{\sqrt{2}}.$$

则 $a + b = 16$, $ab = 15$, 可得: $a = 15$, $b = 1$.

$$\therefore \text{原式} = \frac{\sqrt{15} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{30} + \sqrt{2}}{2}.$$

(2)

(3)

【标注】【知识点】多重二次根式

【知识点】二次根式的四则混合运算

23. 计算: $\sqrt{6 + \sqrt{20 - 8\sqrt{3}}} + \sqrt{6 - \sqrt{20 - 8\sqrt{3}}}.$

【答案】 $2\sqrt{4 + \sqrt{3}}.$

【解析】略

【标注】【能力】运算能力

【知识点】多重二次根式

【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

 我学会了什么